1) (2 val) Um sistema vibratório com um grau de liberdade e amortecido é sujeito a diferentes solicitações.
Caracterizar sucintamente e esboçar graficamente (indicando eventuais pontos notáveis) a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (30%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F^*\delta(t-\tau)$;

b) (30%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t=\tau$, $f(t)=F_0\mu(t-\tau)$.

O sistema é sujeito a uma solicitação periódica $f(t)=f(t+T)$ cuja frequência fundamental $\omega=2\pi/T$ é menor do que a frequência de ressonância do sistema. No entanto, o sistema responde com um nível de vibração elevado.

c) (40%) Diagnosticar a causa de tal comportamento.

2) (2 val) Considerar um sistema vibratório com um grau de liberdade em regime forçado.

a) (25%) Definir factor de amplificação dinâmica. Representar graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da frequência, indicando claramente eventuais pontos notáveis.

b) (25%) Designando a resposta a um impulso unitário $\delta(t)$ por $h(t)$, estabelecer, justificando, uma expressão genérica para a determinação da resposta a uma excitação arbitrária;

c) (25%) Definir espectro de resposta transiente e indicar a sua principal utilidade.

d) (25%) Um sistema não amortecido em regime forçado harmónico, quando excitado a uma frequência idêntica à sua frequência natural, responde com uma amplitude que aumenta indefinidamente (sem limite). Com base na análise de forças actuantes sobre o sistema, explicar este comportamento.

3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema com n graus de liberdade pode ser descrito pelo modelo espacial $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$.

a) (25%) Definir modos naturais de vibração;

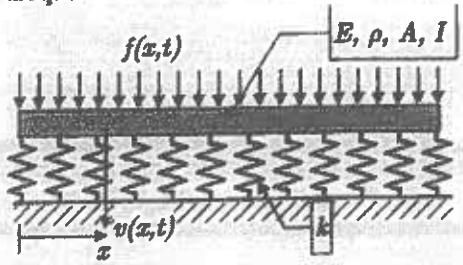
b) (25%) Indicar e escrever uma propriedade relevante dos vectores modais representativos das formas naturais de vibração.

c) (25%) Referir qual o interesse da representação do sistema de equações de movimento na base modal.

d) (25%) Porque é que a matriz de massa é sempre definida positiva? A matriz de rigidez é sempre definida positiva? Justificar.

4) (2 val) O comportamento vibratório em regime livre ou natural de um sistema contínuo é governado por uma equação diferencial de derivadas parciais cuja solução pode ser determinada pelo método da separação de variáveis.

a) (40%) O método da energia de Rayleigh é um método aproximado para estimar a frequência fundamental. Indicar em que princípio(s) se baseia, caracterizar a função de aproximação utilizada e a frequência estimada.



b) (60%) A figura representa uma viga suportada por uma suspensão elástica de rigidez distribuída. Isolar um elemento infinitesimal e estabelecer a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli.

Exame de Recurso - 2008-07-11

Parte Teórica

3. a) Os modos naturais de vibração são constituídos pelas frequências e formas naturais. Assim, representam as soluções possíveis para o problema característico, sendo cada modo natural um movimento harmónico sincrono.

Da sua combinação linear resulta a resposta do sistema não amortecido em regime livre ou natural.

b) Ortogonalidade [illegible]

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_n = 0 \quad \text{para } r \neq s \text{ com } r, s = 1, \dots, n$$

$$\{\phi\}_r^T [\alpha] \{\phi\}_s = 0 \quad \text{para } r \neq s \text{ com } r, s = 1, \dots, n$$

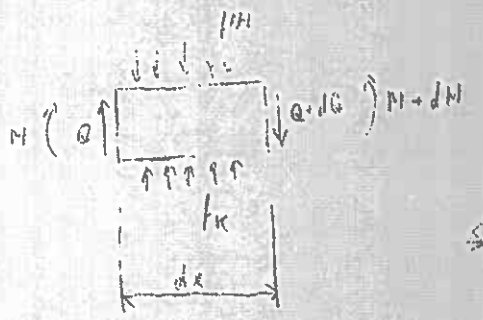
c) Permite o desacoplamento da matriz e de rigidez e nos casos em que a matriz de amortecimento obedece à condição de Caughey (ou de proporcionalidade) também permite o desacoplamento do amortecimento e com isso conduz a total independência das n equações algébricas de movimento.

d) A matriz de massa é sempre definida positiva porque todos os graus de liberdade estão associados a uma massa e como se sabe não existem massas nulas (nem negativas).

O mesmo já não é absolutamente verdade para a matriz de rigidez porque esta já pode ter valores próprios nulos no caso de sistemas semi definidos positivos (com condições fronteira [illegible] para evitar movimentos de corpo [illegible]).

4. a) O método do quociente de Rayleigh [illegible] no [illegible] da conservação da energia [illegible] conversão da [illegible] em energia potencial. Em sistemas contínuos [illegible] de [illegible] função de aproximação que [illegible] geométricas do [illegible] Quanto mais [illegible] for a função de aproximação mais próxima será a frequência natural encontrada da frequência natural exacta.

b)



Euler - Bernoulli

$$\begin{cases} \Sigma M = 0 \\ \Sigma F_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -M + M + dM - (Q + dQ)\cdot dx - f(t)\cdot dx \cdot \frac{dx}{2} + \cancel{k\,dv\,dx \cdot \frac{dx}{2}} = 0 \\ \cancel{Q} - f(t)\,dx + (k\,v(x,t))\,dx - (\cancel{Q} + dQ) = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -Q\,dx - dM = 0 \\ -dQ - f(t)\,dx + k\,v(x,t)\,dx = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Como $dM = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx$; $dQ(x,t) = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx$

$$-Q\,dx + \frac{\partial M(x,t)}{\partial x}\,dx = 0$$

$$-\frac{\partial Q(x,t)}{\partial x}\,dx - f(t)\,dx + k\,v(x,t)\,dx = \rho A\,dx\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q = \frac{\partial M(x,t)}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} - f(t) + k\,v(x,t) = \rho A\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \end{cases}$$

Como $M(x,t) = EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}$

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}\right) + \rho A\,\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = k\,v(x,t) - f(t)}$$

Parte Prática

2. a) $a_{11} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{1\times 4^2}{6EI\times 6^3}\left[(2\times 4-3\times 6)+3\times 6(6-4)2^2\right] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_{11} \cong \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$

$a_{12} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} \cong \frac{1}{EI}\, 0{,}543$

$a_{21} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{0{,}543}{EI} = a_{12}$ ← Não devem ser calculados!

$a_{22} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} = \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$

$$[a] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}790 & 0{,}543 \\ 0{,}543 & 0{,}790 \end{bmatrix} \qquad [m/N]$$

b) $$[k] = [a]^{-1} = EI\begin{bmatrix} 2{,}399 & -1{,}649 \\ -1{,}649 & 2{,}399 \end{bmatrix} \qquad [N/m]$$

c) Pode-se construir directamente o sistema de equações em notação matricial pois: $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$. Mas confirme-se isto aplicando o formalismo de Lagrange:

$$T = \frac{1}{2}\overset{350}{m_1}\cdot\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\overset{350}{m_2}\cdot\dot{x}_2^2$$

Em potencial:

$$V = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2{,}399EI & -1{,}649EI \\ -1{,}649EI & 2{,}399EI \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\times 2{,}399EI\,x_1^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\times 3{,}298EI\,x_1\cdot x_2 - \frac{1}{2}\times 2{,}399EI\,x_2^2$$

Forças não conservativas:

$$Q_1 = f_1\frac{\partial}{\partial x_1}(x_1) + f_2\frac{\partial}{\partial x_1}(x_2) = f_1$$

$$Q_2 = f_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 350\,\dot{x}_1 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 350\,\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = 2{,}399EI\,x_1 - 1{,}649EI\,x_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = 450\,\dot{x}_2 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = 450\,\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -1{,}649EI\,x_1 + 2{,}399EI\,x_2$$

$$\begin{cases} 350\,\ddot{x}_1 + 2,399\,E\,I\,x_1 - 1,649\,E\,I\,x_2 = f_1(t) \\ 450\,\ddot{x}_2 - 1,649\,E\,I\,x_1 + 2,399\,E\,I\,x_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Reparar que isso não faz sentido! Como já [illegible]

$$[m] = \begin{bmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 2,399 & -1,649 \\ -1,649 & 2,399 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 350\,\ddot{x}_1(t) + 2,399\,E\,I\,x_1(t) - 1,649\,E\,I\,x_2(t) = f_1(t) \\ 450\,\ddot{x}_2(t) - 1,649\,E\,I\,x_1 + 2,399\,E\,I\,x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

d) $\{x(t)\} = \{u\}\cos(\omega t)$

$$\begin{bmatrix} 0,1128\times10^7 - 500\,\omega^2 & -0,71550\times10^6 \\ -0,71550\times10^6 & 0,1128\times10^7 - 375\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(94)

$$\begin{vmatrix} 0,1128\times10^7 - 500\,\omega^2 & -0,71550\times10^6 \\ -0,71550\times10^6 & 0,1128\times10^7 - 375\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (=)$$

$(=)\ \omega_1 = 28,320$ rad/s $\vee\ \omega_2 = 60,798$ rad/s

1º Forma natural:

$$\left(0,1128\times10^7 - 500\times\omega_1^2\right)u_1 - 0,71550\times10^6\,u_2 = 0 \quad (=)$$

$(=)\ u_1 = 1,0667\,u_2$

$$\text{LD} \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,0667 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma Natural:

$$\left(0,1128\times10^7 - 500\,\omega_2^2\right)u_1 - 0,71550\times10^6\,u_2 = 0 \ (=)\ u_1 = -0,7071\,u_2$$

$$\text{LD} \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,7071 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

i) Normalização

$$\{\phi\}_i = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_i^T [m] \{u\}_i}} \{u\}_i$$

Afinal:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{943{,}924}} \begin{Bmatrix} 1{,}0667 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}03472 \\ 0{,}03255 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{622{,}175}} \begin{Bmatrix} -0{,}7031 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}02819 \\ 0{,}04009 \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}03472 & -0{,}02819 \\ 0{,}03255 & 0{,}04009 \end{bmatrix}$$

Seja $\{x(t)\} = [\Phi]\{\eta(t)\} \Rightarrow [I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 28{,}320^2 & \\ 0 & 66{,}795^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}03472 f_1(t) + 0{,}03255 f_2(t) \\ -0{,}02819 f_1(t) + 0{,}04009 f_2(t) \end{Bmatrix}$$

f) Pela chúnica anterior:

$0 \le t \le t_1 \rightarrow f_1(t) = F_1 \delta(t) \wedge f_2(t) = 0$

$$\eta_1(t) = 0{,}03472 \cdot F_1 \frac{1}{\underset{\approx 26{,}120}{m_1 \omega_1}} e^{0} \operatorname{sen} \omega_1 t = \frac{0{,}03472 F_1}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t$$

$$\eta_2(t) = -0{,}02819 F_1 \frac{1}{m_2 \omega_2} e^{0} \operatorname{sen} \omega_2 t = \frac{-0{,}02819 F_1}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t$$

95

No instante $t = t_1$:

$$\eta_1(t = t_1) = \frac{0{,}03472}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t_1$$

$$\eta_2(t = t_1) = -\frac{0{,}02819}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t_1$$

$$\dot{\eta}_1(t = t_1) = 0{,}03472 \cos \omega_1 t_1$$

$$\dot{\eta}_2(t = t_1) = -0{,}02819 \cos \omega_2 t_1$$

Então, para $t > t_1$: (supressão 6.10)

$$\eta_1(t) = e^{0} \left(\frac{0{,}03472}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t_1 \cos \omega_1 (t - t_1) + \frac{0{,}03472}{\omega_1} \cos \omega_1 t_1 \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_1) \right)$$

$$\eta_2(t) = e^{0} \left(\frac{-0{,}02819}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t_1 \cos \omega_2 (t - t_1) - \frac{0{,}02819}{\omega_2} \cos \omega_2 t_1 \operatorname{sen} \omega_2 (t - t_1) \right)$$

Como:

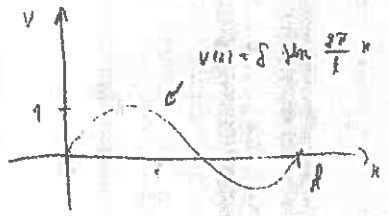
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

Para $t > t_1$:

$$\boxed{x_1(t) = \frac{0{,}03472^2}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \cos \omega_1 (t - t_1) + \frac{0{,}03472^2}{\omega_1} \cos \omega_1 t_1 \operatorname{sen} \omega_1 (t - t_1) + \frac{0{,}02819^2}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \cos \omega_2 (t - t_1) + \frac{0{,}02819^2}{\omega_2} \cos \omega_2 t_1 \operatorname{sen} \omega_2 (t - t_1)}$$

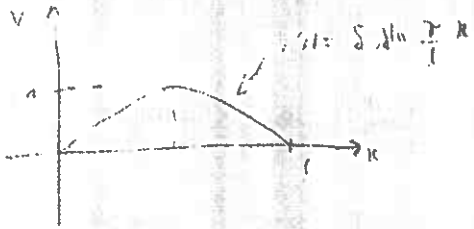
3. a) $V(x) = \delta \sin \frac{2\pi}{l} x$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{l}} = l$



$V(x) = \delta \sin \frac{\pi}{l} x$

$\rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{l}} = 2l$



Como se vê a função $V(x) = \delta \sin \frac{\pi}{l} x$ é a mais aquela para estimar a frequência fundamental porque como se sabe o modo fundamental (1º modo) não tem nodos e como tal $V(x) \neq 0$, $x \in]0, l[$.

b) $T_{max} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^l \ell A (V(x))^2 dx + f^*_{cfn} \right) =$

$= \omega_2 \left(\frac{\ell A}{2} \int_0^l \delta^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{l} x\right) dx \right) = \omega_2 \frac{\ell A \delta^2}{2} \frac{l}{2} \times 1 \times \frac{l}{2} \times 2 =$

$= \omega_2 \left(\frac{\ell A}{2} \frac{\delta^2 l}{2} \right)$

c) $V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \left[\frac{1}{2} K \operatorname{sen}\alpha \left(V\left(\frac{l}{2}\right) \right)^2 \right] \times 2 =$

$= \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(-\delta \frac{\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right) \right)^2 dx + \frac{1}{2} 2K \sin\alpha \left(\delta^2 \underbrace{\sin^2\left(\frac{\pi}{l} \frac{l}{2}\right)}_{1} \right) =$

$= \frac{1}{2} EI \left(\frac{48{,}7045\, \delta^2}{l^3} - 0 \right) + \frac{1}{2} \left(2K \delta^2 \sin\alpha \right)$

d) $R(V(x)) = \omega^2 = \frac{V_{max}}{T^*_{max}} = \frac{\frac{1}{2} EI \left(\frac{48{,}7045\, \delta^2}{l^3} \right) + \frac{1}{2} \left(2K \delta^2 \sin\alpha \right)}{\frac{\ell A}{2} \frac{\delta^2 l}{2}} =$

$= \frac{\frac{\varepsilon EI}{l^3} \cdot 48{,}7045 + 2K \varepsilon \sin\alpha}{\frac{\varepsilon \ell A l}{2}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\varepsilon EI}{l^3}} \cdot \sqrt{\frac{48{,}7045 + 2K\varepsilon \sin\alpha}{\frac{\varepsilon \ell A l}{2}}} = \sqrt{K} \cdot \sqrt{\frac{\frac{48{,}7045}{\varepsilon} + 2K \sin\alpha}{\frac{\ell A l}{2}}}$

e) $K \rightarrow \infty \Rightarrow \varepsilon \rightarrow \infty \Rightarrow V\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ Apoio simples em $l/2$

Como a função utilizada em $V\left(\frac{l}{2}\right) = \delta$ então não se obtém uma solução válida da frequência natural.

Para $K \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$

Trata-se de uma viga apoio simples - apoio simples sem interacção com o exterior.

Como referido no enunciado $V(x)$ utilizado já é uma função admissível para o problema pelo que continua a sê-lo para este caso limite (no quociente de Rayleigh o termo V_{cfm} anula-se).

f) $K \to 0$:

Viga em regime livre, cond fronteira: apoio simples - apoio simples.

Pág. 358:

$$\beta_1 l = \pi \Rightarrow \omega_1 = (\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} =$$

$K \to \infty$:

Viga em regime livre, cond. fronteira: apoio simples - apoio simples

Mas em regime livre responderá com o 2º modo de vibração porque está simplesmente apoiada a meio vão que é o ponto onde se encontra o nodo do 2º modo de vibração para uma viga simplesmente apoiada.

$$\beta_2 l = 2\pi \Rightarrow \omega_{(1)} = (2\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

freq. fundamental para esta configuração

A título de curiosidade, vou calcular o valor de ω_1^{QR} para $K \to 0$:

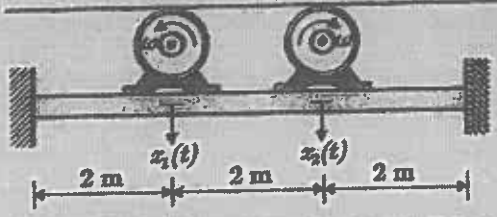
$$\omega_1^{QR}\Big|_{K\to 0} = \sqrt{\frac{\frac{EI}{l^3} \cdot 48{,}7045 + 0}{\frac{\rho A l}{2}}} = \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4} \cdot \frac{48{,}7045}{1/2}} \cong$$

$$\cong 9{,}8696 \cdot \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

A exacta era:

$$\omega_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} \cong 9{,}8696 \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Conclui-se que $\omega_1^{QR} = \omega_1^{exacta}$



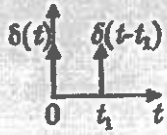
2) (4 val.) Uma máquina de 300 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

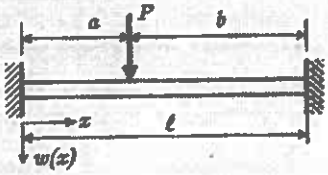
$$\begin{bmatrix} 300 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

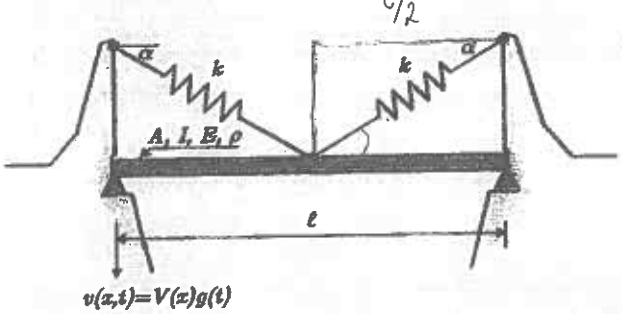
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t=0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^3}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$

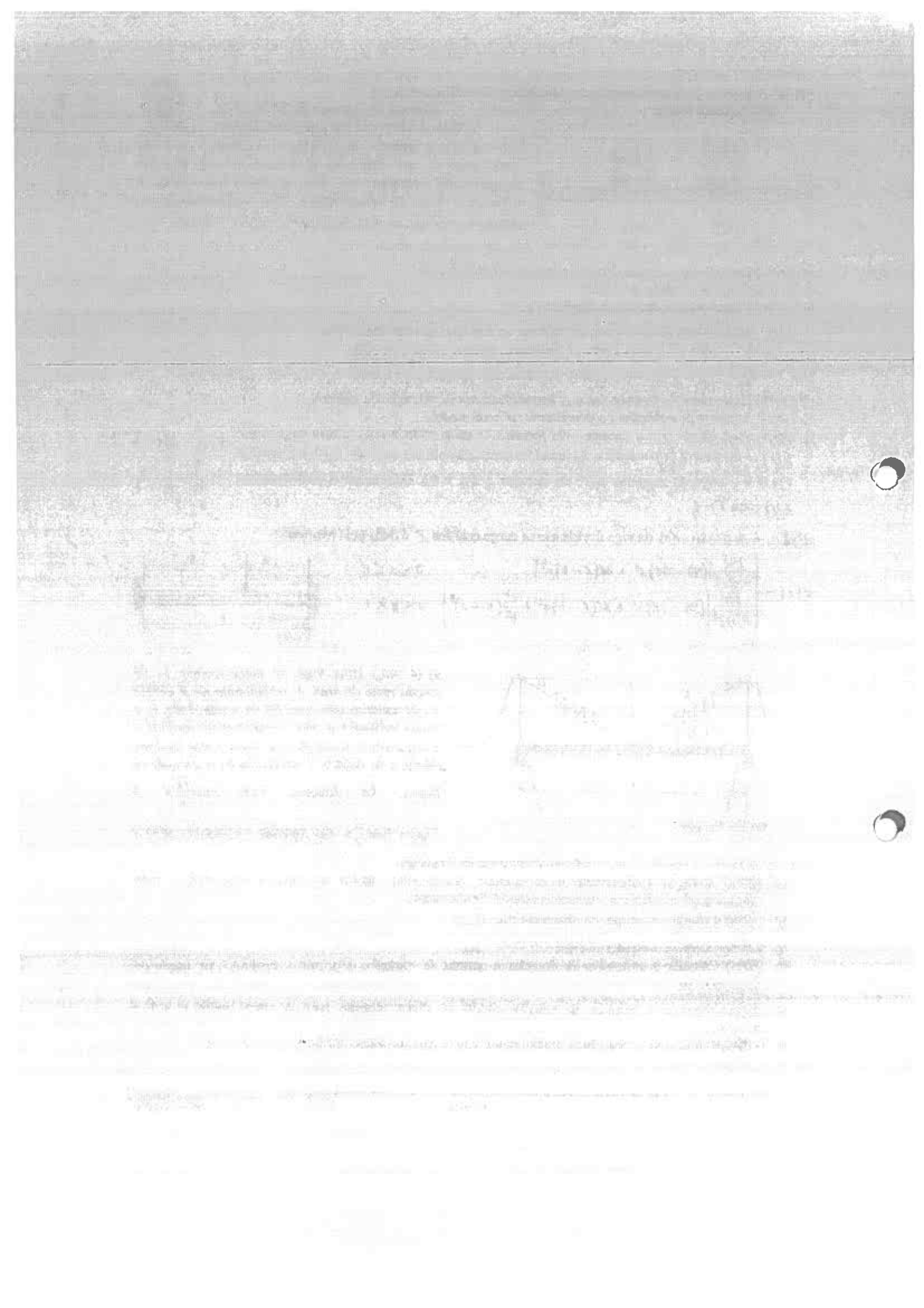




3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{Kv}$$



Exame de Recurso de 2008-07-11

PARTE TEÓRICA

③

a) Modos naturais de vibração: são constituídos pelas frequências e formas naturais. Assim, representam as soluções possíveis para o problema característico, sendo cada modo natural um movimento harmónico simples.

b) Ortogonalidade relativamente a massa e rigidez.

$$\{\phi\}_r^T [m] \{\phi\}_s = 0 \qquad \text{para } r \neq s \text{, com } r,s = 1 \dots n$$

$$\{\phi\}_r^T [k] \{\phi\}_s = 0 \qquad \text{para } r \neq s \text{, com } r,s = 1 \dots n$$

c) Representação do sistema de equações de movimento na base modal: Permite o desacoplamento da inércia e de rigidez e nos casos em que a matriz de amortecimento obedece à condição de Caughey (ou de proporcionalidade), também permite o desacoplamento do amortecimento e com isso conduz a total independência das n equações algébricas de movimento.

d) A matriz de massa é sempre definida positiva porque todos os graus de liberdade estão associados a uma massa e como se sabe não existem massas nulas (ou negativas). O mesmo já não é absolutamente verdade para a matriz rigidez porque esta já pode ter valores próprios nulos no caso de sistemas semi-definidos positivos.

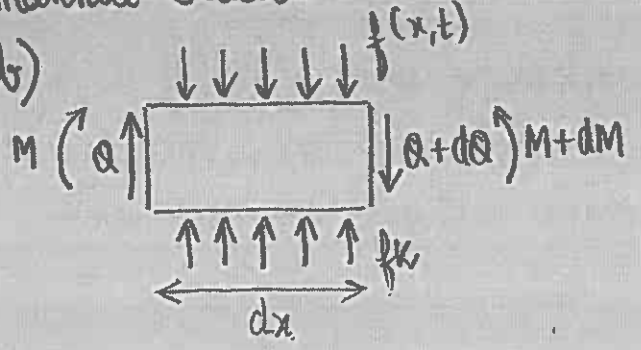
④

a) O método da energia de Rayleigh baseia-se no princípio da conservação da energia mecânica e da total conversão da energia cinética em energia potencial. Em sistemas contínuos faz uso de uma função de aproximação que tem de verificar as condições fronteira geométricas do problema e que tem de ser

derivável o nº de vezes igual a metade da ordem do problema.

Quanto mais próxima for a função de aproximação, mais próxima será a frequência natural encontrada da frequência natural exacta.

b)



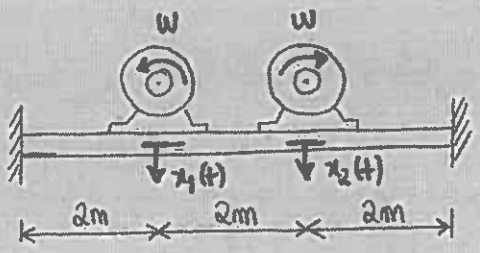
igual exame 2003

PARTE PRÁTICA

2.

$m_1 = 350\ kg$

$m_2 = 450\ kg$



a)

$$w(x) = \begin{cases} \frac{Pb^2}{6EIl^3}\left[(2b-3l)x^3 + 3l(l-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \frac{Pb}{6EIl^3}\left[(2b-3l)x^3 + 3l(l-b)x^2 + \frac{l^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le l \end{cases}$$

$$a_{11} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{1\times 4^2}{6\times EI\times 6^3}\left[(2\times 4 - 3\times 6)\times 2^3 + 3\times 6(6-4)\times 2^2\right]$$

$$= \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$$

$$a_{12} = w(x=2)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} = \frac{1}{EI}\cdot 0{,}543$$

$$a_{21} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\P=1}} = \frac{1}{EI}\cdot 0{,}543$$

$$a_{22} = w(x=4)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\P=1}} = \frac{1}{EI}\cdot 0{,}790$$

$$[a] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{EI}\cdot\begin{bmatrix} 0{,}790 & 0{,}543 \\ 0{,}543 & 0{,}790 \end{bmatrix}$$

b)

$$[k] = [a]^{-1} = EI \cdot \begin{bmatrix} 2,399 & -1,649 \\ -1,649 & 2,399 \end{bmatrix}$$

c) $[m] \cdot \{\ddot{x}(t)\} + [k] \{x(t)\} = \{f(t)\}$

$$[m] = \begin{bmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 350 & 0 \\ 0 & 450 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 2,399 & -1,649 \\ -1,649 & 2,399 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 350\,\ddot{x}_1(t) + 2,399 EI\, x_1(t) - 1,649 EI\, x_2(t) = f_1(t) \\ 450\,\ddot{x}_2(t) - 1,649 EI\, x_1(t) + 2,399 EI\, x_2(t) = f_2(t) \end{cases}$$

d) $\{x(t)\} = \{u\} \cos(\omega t - \phi)$

$$[[K] - \omega^2 [m]] \cdot \{u\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0,1128E7 - \omega^2 \cdot 500 & -0,7755E6 \\ -0,7755E6 & 0,1128E7 - 375\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$|[K] - \omega^2 [m]| = 0 \begin{cases} \omega_1 = 28,32 \text{ rad/s} \\ \omega_2 = 66,798 \text{ rad/s} \end{cases}$$

1ª forma natural:

$$-0,7755E6\, u_1 + (0,1128E7 - 375 \times 28,32^2)\, u_2 = 0$$

$$-0,7755E6\, u_1 = -0,8272E6\, u_2 \quad \therefore u_1 = 1,0667\, u_2$$

$$\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1,0667 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2º forma natural

$$-0{,}7755 \in 6\, u_1 + (0{,}1128 \in 7 - 375 \times 66{,}798^2) u_2 = 0$$

$$-0{,}7755 \in 6\, u_1 = +0{,}5452 \in 6\, u_2 \therefore u_1 = -0{,}7030\, u_2$$

$$\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}7030 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

e) $$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1 [m] \{u\}_1}} \cdot \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}0366 \\ 0{,}0343 \end{Bmatrix}$$

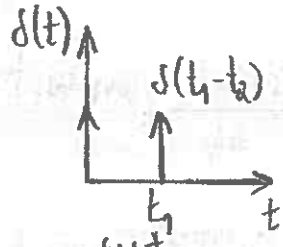
$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2 [m] \{u\}_2}} \cdot \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}0282 \\ 0{,}0401 \end{Bmatrix}$$

$$\{x(t)\} = [\phi] \{\eta(t)\} \therefore [I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 28{,}320^2 & 0 \\ 0 & 66{,}798^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}0366 & -0{,}0282 \\ 0{,}0343 & 0{,}0401 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

f) $x_1(t)\ (t=0) \rightarrow f_1(t) = F_1\, \delta(t)$

$x_2(t)\ (t_1 > 0) \rightarrow f_2(t) = F_2\, \delta(t - t_1)$



Resposta impulsiva: $x(t) = F \cdot \frac{1}{m w_d} \cdot e^{-\xi w_n t} \operatorname{sen} w_d t$

$$\eta_1(t) = 0{,}0366\, F_1 \frac{1}{m_1 w_1} \cdot e^{0} \operatorname{sen} w_1 t =$$

$$= 0{,}0366\, F_1 \cdot \frac{1}{1 \times 28{,}32} \cdot \operatorname{sen}(28{,}32 t)$$

$$\eta_2(t) = -0{,}0282\, F_1 \frac{1}{m_2 w_2} \operatorname{sen}(w_2 t)$$

No instante $t = t_1$:

$$\eta_1(t=t_1) = \frac{0{,}0366}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \rightarrow \dot{\eta}_1(t=t_1) = 0{,}0366 \cos \omega_1 t$$

$$\eta_2(t=t_1) = -\frac{0{,}0282}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \rightarrow \dot{\eta}_2(t=t_1) = -0{,}0282 \cos \omega_2 t$$

Para $t > t_1$: (6.10)

$$\eta_1(t) = e^0 \left(\frac{0{,}0366}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t_1 \cos \omega_1 (t-t_1) + \frac{0{,}0366}{\omega_1} \cos \omega_1 t \operatorname{sen} \omega_1 (t-t_1) \right)$$

$$\eta_2(t) = e^0 \left(-\frac{0{,}0282}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \cos \omega_2 (t-t_1) - \frac{0{,}0282}{\omega_2} \cos \omega_2 t \cos \omega_2 (t-t_1) \right)$$

Como:

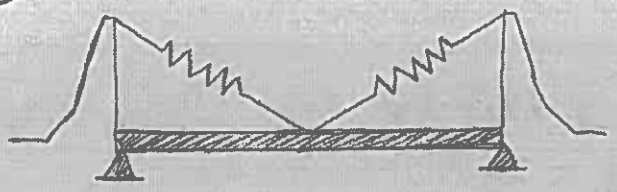
$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [\phi] \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix}$$

Para $t > t_1$:

$$x_1(t) = \frac{0{,}0366^2}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t \cos \omega_1 (t-t_1) + \frac{0{,}0366^2}{\omega_1} \cos \omega_1 t_1 \operatorname{sen} \omega_1 (t-t_1)$$

$$+ \frac{0{,}0282^2}{\omega_2} \operatorname{sen} \omega_2 t \cos \omega_2 (t-t_1) + \frac{0{,}0282^2}{\omega_2} \cos \omega_2 t_2 \operatorname{sen} \omega_2 (t-t_1)$$

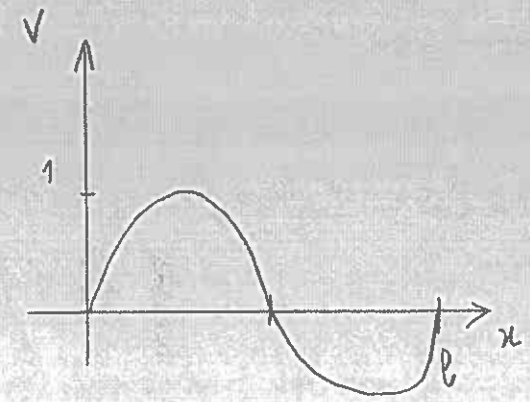
3.

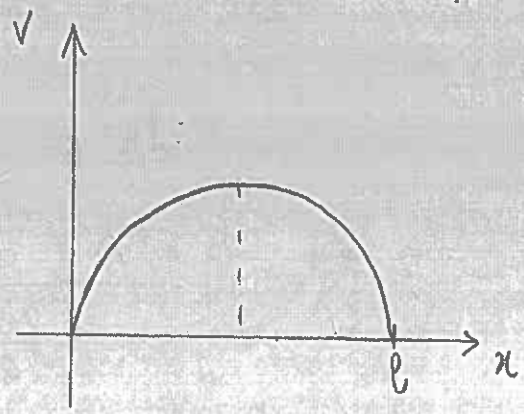


$$V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{2\pi}{\ell} \cdot x \quad (1)$$

$$V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} \cdot x \quad (2)$$

a) (1) (2)





Como se pode observar pelos gráficos, a função $V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} \cdot x$ é a mais adequada para estimar a frequência fundamental porque como se sabe o modo fundamental (1º modo) não tem nodos e como tal $V(x) \neq 0$, $x \in]0, \ell[$.

b) $$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) V^2(x)\, dx + \cancel{T^x_{\ell n}} \right) =$$

$$= \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left(\delta^2 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\ell} \cdot x \right) dx =$$

$$= \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \rho A \delta^2 \cdot \frac{\ell}{2} = \omega^2 \cdot \frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 \ell}{2}$$

c) $$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{\delta^2 V(x)}{\delta x^2} \right)^2 dx + 2 \times \left(\frac{1}{2} K \operatorname{sen}\alpha\, V\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \right)$$

$$\frac{\delta V(x)}{dx} = -\delta \frac{\pi}{\ell} \cos \frac{\pi}{\ell} \cdot x \quad ; \quad \frac{\delta^2 V(x)}{dx^2} = -\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{\ell} \cdot x \right)$$

$$V_{máx} = \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \left(-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{\ell} x \right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2K \operatorname{sen}\alpha \cdot \left(\delta^2 \underbrace{\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{\ell} \cdot \frac{\ell}{2}}_{=1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{\ell^{\cancel{4}\,3}} \cdot \left(+ \frac{\cancel{\ell}}{2} \right) + \frac{1}{2} \left(2K \delta^2 \operatorname{sen}\alpha \right)$$

d) $R(V(x)) = w^2 = \frac{V_{max}}{T_{max}}$

$$= \frac{\frac{1}{2} EI \delta^2 \frac{\pi^4}{2\ell^3} + \frac{1}{2} 2K_1 \delta^2 \sin\alpha}{\frac{\rho A}{2} \cdot \frac{\delta^2 \ell}{2}} =$$

$$= \frac{\frac{\varepsilon EI}{\ell^3} \cdot \frac{\pi^4}{2} + 2\frac{\varepsilon EI}{\ell^3} \cdot \sin\alpha}{\varepsilon \cdot \frac{\rho A \ell}{2}} =$$

$$w = \sqrt{\frac{\varepsilon EI}{\ell^3}} \cdot \sqrt{\frac{\pi^4/2 + 2\sin\alpha}{\varepsilon \frac{\rho A \ell}{2}}}$$

e) Para $K \to 0 \Rightarrow \varepsilon \to 0$

Trata-se de 1 viga apoio simples - apoio simples sem interacções com o exterior.

Como referido no enunciado $V(x)$ utilizado já é uma função admissível para o problema pelo que continua a sê-lo para este caso limite.

Para $K \to \infty \Rightarrow \varepsilon \to \infty \Rightarrow V(\ell/2) = 0$

$\Downarrow$

Apoio simples em $\ell/2$.

Como a função utilizada em $V(\ell/2) = \delta$, então não se obtém uma solução válida de frequência natural.

f) Para $K \to 0$: Apoio simples – Apoio simples

pág. 358 $\hookrightarrow \beta_1 \ell = \pi \Rightarrow w_1 = \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$

Para $K \to \infty$: Viga em reg. livre: condições: apoio simples - apoio simples

Em reg. livre responderá com o 2º modo de vibração porque está simplesmente apoiada a meio vão.

$\beta_2 \ell = 2\pi$

$\hookrightarrow w_1 = (2\pi)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$